

修改 Koch 曲线岛的迭代二叉树及分维测定

李玉清¹ 李蓬² 刘雅晶³ 赵咏秋¹

(1 大冶特殊钢股份有限公司技术中心, 黄石 435001) (2 北京航空航天大学, 北京 100083) (3 北京科技大学, 北京 100083)

摘要 获得了修改 Koch 曲线岛周界和面积的迭代二叉树, 并由之导出了周长和面积的表达式。说明周长—最大直径方法可获得该分形结构分维理论值, 同时确定由周长—面积方法获得分维理论值和满足图象分析精度要求的理想分维值的临界嵌套层次及其同参量 a 和 n 的关系, 并认为在分维测定中周长—面积方法是可能得到理想分维值的有效方法。

关键词 修改 Koch 曲线岛, 迭代二叉树, 临界嵌套层次, 分维测定

1 前言

关于 Koch 曲线岛的构造和分维测定的理论和方 法已有一些报道^[1~3]。本文对正 n 边形初始图形、下界结构相同的修改 Koch 曲线岛进行了深入分析, 不仅说明了周长—最大直径方法可获得该分形结构的分维理论值, 而且由得到的周界和面积的迭代二叉树, 确定了临界嵌套层次, 从而说明在分维测定中周长—面积方法也可能是得到理想分维值的有效方法。

2 迭代二叉树

若参量 a 在 $(0, 1/3]$ 区间任意取某一固定值, 去掉位于单位区间正中、与全长比例为 a 的一段区间, 并用与之组成等边三角形的另外两边代替, 将这样的迭代过程反复进行下去而构造出所谓修改的 von Koch 曲线, 其 Hausdorff 维数 s 是方程

$$2a^s + 2[(1/2)(1-a)]^s = 1$$

的解^[4]。

由修改的 von Koch 曲线可围成初始图形为正 n 边形的修改 Koch 曲线岛^[2]。图 1 是 $a=2/9$ 的修改 Koch 曲线岛, 其初始图形为正三角形, 嵌套层次 $m=2$ (左)和 3 (右)。

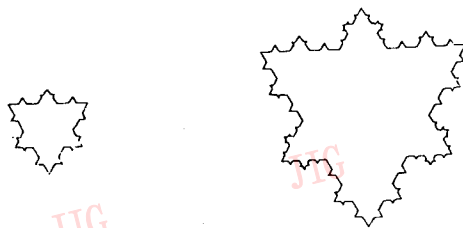


图 1 $a=2/9$ 的修改 Koch 曲线岛, 其初始图形为正三角形, 嵌套层次 $m=2$ (左)和 3 (右)

根据上述构造方式, 可以获得初始图形为正 n 边形的修改 Koch 曲线岛周界的迭代二叉树(图 2)。

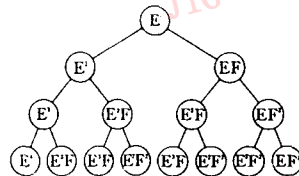


图 2 修改 Koch 曲线岛周界的迭代二叉树。

$$E=a, F=(1-a)/2$$

图中结点里的代数式等于上述迭代过程中所生成的等边三角形的边长的 $1/3^{m-1}L_0$, L_0 为 $m=1$ 的曲线岛的初始图形边长, $3^{m-1}L_0$ 则为嵌套 m 层的曲线岛的初始图形边长; 结点里的 $E=a$, $F=(1-a)/2$ 。二叉树中, 对应于嵌套层次 m , 每一层的结点数 为 2^{m-1} 个, 树中每一个结点重复出现 2^{m-1} 次。

由此二叉树,可导出嵌套层次为 m 、下界结构相同的曲线岛的周长(见附录中的 1)

$$P_m = (1 + a)^m n 3^{m-1} L_0 \quad (1)$$

如果用结点中代数式的平方与 $\sqrt{3}/4$ 之积作为新的结点,则得到与图 2 相似的修改 Koch 曲线岛面积增量的迭代二叉树。此时,结点中的代数式等于迭代过程中生成的等边三角形的面积的 $1/3^{2(m-1)} L_0^2$ 。同样可导出嵌套层次为 m 的曲线岛的面积(见附录中的 2)

$$A_m = \frac{n}{4} \left\{ \text{ctan} \frac{\pi}{n} + \frac{\sqrt{3} a^2 [2^m - (1 - 2a + 5a^2)^m]}{2^{m-1} (1 + 2a - 5a^2)} \right\} 3^{2(m-1)} L_0^2 \quad (2)$$

3 分维的测定

由于修改 Koch 曲线岛的凸壳形状不随测量码

尺(嵌套层次)而变,因而采用周长—最大直径方法可获得该分形结构的稳定分维值^[1]。其最大直径

$$d_{\max} = d(n, a) 3^{m-1} L_0 \quad (3)$$

由于初始图形边长为 $3^{m-1} L_0$ 的岛的 d_{\max} 为二元函数 $d(n, a)$ 所确定,那么从图 1 可见,当 n, a 改变时, d_{\max} 的所在方向是不确定的,因而难于由之计算 $\lg d_{\max}$ 。然而,由式(1)和(3),仍可从嵌套层次分别为 m_1 和 $m_2 (m_1 > m_2)$ 、下界结构相同的曲线岛获得分维理论值

$$D_{\text{theory}} = \frac{d \lg P_m}{d \lg d_{\max}} = \frac{\lg(1 + a)^{m_1 - m_2} + \lg 3^{m_1 - m_2}}{\lg 3^{m_1 - m_2}} \quad (4)$$

表 1 的下部给出按式(4)算出的 D_{theory} 值同参量 a 的关系。

当 $m_1 - m_2 = 1 (m = m_1)$ 时,由式(1)和(2),算出初始图形为正 n 边形的修改 Koch 曲线岛在不同

表 1 修改 Koch 曲线岛的临界嵌套层次 m_c 同 n 和 a 的关系

n	m_c									
	$a=1/30$	1/15	1/10	2/5	1/6	1/5	7/30	4/15	3/10	1/3
3	11(3)	12(5)	12(6)	12(6)	12(6)	12(7)	13(7)	14(7)	15(8)	16(9)
4	10(3)	11(5)	11(6)	12(5)	12(5)	13(6)	13(7)	13(6)	14(8)	16(8)
5	10(2)	11(4)	11(5)	11(5)	13(5)	13(6)	13(6)	13(6)	14(8)	15(8)
6	8(2)	10(4)	10(5)	11(5)	12(5)	12(6)	12(6)	13(6)	13(7)	14(8)
7	8(2)	10(4)	11(5)	11(5)	12(4)	12(5)	13(6)	13(6)	13(7)	14(7)
8	8(2)	10(4)	10(5)	11(5)	11(4)	11(5)	12(6)	12(6)	13(7)	14(7)
9	8(2)	10(4)	10(4)	10(4)	11(4)	11(5)	11(6)	11(5)	12(7)	13(7)
10	8(2)	10(3)	10(4)	10(4)	11(4)	11(5)	11(6)	11(5)	12(7)	13(7)
D_{theory}	1.029 846	1.058 746	1.086 755	1.113 928	1.140 314	1.165 956	1.190 896	1.215 170	1.238 815	1.261 860
D_{ideal}	1.030	1.059	1.087	1.114	1.140	1.166	1.191	1.215	1.239	1.262

m 和 a 值时的分维 D 值。根据计算结果,对一定的 n 和 a 值,能得到临界嵌套层次 m_c (表 1)。当 $m < m_c$ 时,周长—面积关系失效;当 $m \geq m_c$ 时,采用周长—面积方法也可以获得分维理论值 D_{theory} 。表 1“()”中的 m_c 是获得自动图象分析精度要求的理想分维值 D_{ideal} (表 1 下部)的临界嵌套层次。表 1 表明,若 a 在 $[1/30, 1/3]$ 区间取值,当 $n=3, 4, 5$ 时,采用周长—面积方法获得 D_{theory} 和 D_{ideal} 的临界嵌套层次 m_c 分别为 10~16 和 3~9;当 $n=6, 7, 8, 9, 10$ 时, m_c 分别为 8~14 和 2~7。由此说明, m_c 随 a 值的减小和 n 值的增大而减小;在分维测定中,由周长—面积方法获得修改 Koch 曲线岛的 D_{ideal} 是有可能的。

当 $a=134\ 795/786\ 432$ 时,由周长—最大直径

方法,能获得该分形结构的分维 $D=1.144$,这与随机 Koch 曲线岛分维等值^[2,4]。采用周长—面积方法获得该分形结构分维值(1.144)的临界嵌套层次 m_c 及其同 n 的关系如表 2。由此说明,在分维测定中,由周长—面积方法可获得该分形结构的上述分维值。

表 2 一种特殊修改 Koch 曲线岛的临界嵌套层次 m_c 和 n 之间的关系

n	3	4	5	6	7	8	9	10
m_c	6	6	5	5	5	5	5	5

4 结 论

(1)根据初始图形为正 n 边形的修改 koch 曲线岛的构造方式,获得了其周界和面积的迭代二叉树,

并由之导出曲线岛周长和面积的表达式:

$$P_m = (1 + a)^m n 3^{m-1} L_0$$

$$A_m = \frac{n}{4} \left\{ \tan \frac{\pi}{n} + \right.$$

$$\left. \frac{\sqrt{3} a^2 [2^m - (1 - 2a + 5a^2)^m]}{2^{m-1} (1 + 2a - 5a^2)} \right\} 3^{2(m-1)} L_0^2$$

(2) 采用周长—最大直径方法可获得修改 Koch 曲线岛的分维理论值。当岛的嵌套层次小于临界嵌套层次时, 周长—面积关系失效; 采用周长—面积方法获得该分形结构分维理论值和满足自动图象分析精度要求的理想分维值的嵌套层次随参量 a 的减小和 n 的增大而减小, 且分别为 10~16 和 3~9。在分维测定中, 周长—面积方法仍有可能是获得该分形结构理想分维值的有效方法。

参考文献

- 1 刘国权, 于海波, 许洋等. 分形统一方程与分维稳定性. 中国科学, 1995, 25: 1116~1120.
- 2 赵咏秋, 李玉清, 冯永和. 三次 Koch 曲线岛的构造方式与维数. 中国体视学与图像分析, 1997, 2(1): 6~11.
- 3 李玉清, 赵咏秋. 自相似结构组合的真伪分维及真分维的测定. 中国体视学与图像分析, 1996, 1(3, 4): 26~33.
- 4 Falconer K J. Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications, John Wiley and Sons, 1990.

附录 修改 Koch 曲线岛周长和面积的表达式

1 周长的表达式

对于初始图形为正 n 边形(边长为 L_{0m})的修改 Koch 曲线岛, 当其嵌套层次 $m=1, 2, 3, 4$ 时, 由图 2, 并注意 $E+F=(1+E)/2$, 可分别得到其周长 P_m :

$$P_1 = nL_{01} + EnL_{01} = (1+E)nL_{01}$$

$$P_2 = (1+E)nL_{02} + 2E(E+F)nL_{02}$$

即
$$P_2 = (1+E)^2 nL_{02}$$

$$P_3 = (1+E)^2 nL_{03} + 2^2 E(E^2 + 2EF + F^2) nL_{03}$$

整理后得到

$$P_3 = (1+E)^3 nL_{03}$$

$$P_4 = (1+E)^3 nL_{04} + 2^3 E(E^3 +$$

$$3E^2F + 3EF^2 + F^3) nL_{04}$$

整理后得到

$$P_4 = (1+E)^4 nL_{04}$$

设
则

$$P_k = (1+E)^k nL_{0k}$$

$$P_{k+1} = (1+E)^k nL_{0(k+1)} + 2^k E[(E^k + kE^{k-1}F + \frac{k(k-1)}{2!} E^{k-2}F^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} E^{k-3}F^3 + \dots + \frac{k(k-1)(k-2)\dots 2}{(k-1)!} EF^{k-1} + F^k] nL_{0(k+1)}$$

整理后得到

$$P_{k+1} = (1+E)^k nL_{0(k+1)} + 2^k E(E+K)^k nL_{0(k+1)}$$

即
$$P_{k+1} = (1+E)^{k+1} nL_{0(k+1)}$$

从而
$$P_m = (1+E)^m nL_{0m}$$

将
$$E = a, L_{0m} = 3^{m-1} L_0$$

代入上式, 得到周长

$$P_m = (1+a)^m 3^{m-1} L_0$$

2 面积的表达式

修改 Koch 曲线岛的面积 A_m 由其初始图形面积 A_{0m} 和迭代过程所产生的面积增量 ΔA_m 组成, 即

$$A_m = A_{0m} + \Delta A_m$$

由于所研究的曲线岛的初始图形是边长为 L_{0m} 的正 n 边形, 显然

$$A_0 = \frac{n}{4} \tan \frac{\pi}{n} L_{0m}^2$$

令
$$C_m = \frac{\sqrt{3}}{4} n E^2 L_{0m}^2, G = E^2 + F^2$$

由面积增量的迭代二叉树(参见图 2), 当 $m=1, 2, 3, 4$ 时, 可分别得到

$$\Delta A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} E^2 L_{01}^2 n = C_1$$

$$\Delta A_2 = C_2 + 2 \frac{\sqrt{3}}{4} (E^4 + E^2 F^2) L_{02}^2 n =$$

$$C_2 + 2C_2 G$$

即
$$\Delta A_2 = (1 + 2G) C_2$$

$$\Delta A_3 = (1 + 2G) C_3 + 2^2 C_3 (E^4 + 2E^2 F^2 + F^4)$$

整理后得到

$$\Delta A_3 = (1 + 2G + 2^2 G^2) C_3$$

$$\Delta A_4 = (1 + 2G + 2^2 G^2) C_4 +$$

$$2^3 C_4 (E^6 + 3E^4 F^2 + 3E^2 F^4 + F^6)$$

整理后得到

$$\Delta A_4 = (1 + 2G + 2^2 G^2 + 2^3 G^3) C_4$$

由数学归纳法

$$\Delta A_m = (1 + 2G + 2^2 G^2 + \dots + 2^{m-1} G^{m-1}) C_m$$

$$\Delta A_m = \frac{1 - 2^m G^m}{1 - 2G} C_m$$

将 $G = E^2 + F^2, E = a, F = (1 - a)/2$

及
$$C_m = \frac{\sqrt{3}}{4} n E^2 L_{om}^2$$

代入上式, 得到

$$\Delta A_m = \frac{2^m - (1 - 2a + 5a^2)^m}{1 + 2a - 5a^2} \frac{\sqrt{3}}{2^{m+1}} n a^2 L_{om}^2$$

所以 $A_m =$

$$\left\{ \operatorname{ctan} \frac{\pi}{n} + \frac{\sqrt{3}}{2^{m-1}} a^2 \frac{2^m - (1 - 2a + 5a^2)^m}{1 + 2a - 5a^2} \right\} \frac{n}{4} L_{om}^2$$

再将 $L_{om} = 3^{m-1} L_0$

代入上式, 得到面积

$$A_m = \frac{n}{4} \left\{ \operatorname{ctan} \frac{\pi}{n} + \frac{\sqrt{3} a^2 [2^m - (1 - 2a + 5a^2)^m]}{2^{m-1} (1 + 2a - 5a^2)} \right\} 3^{2(m-1)} L_0^2$$



李玉清 1965年毕业于武汉大学物理系,高级工程师,主要研究方向:奥氏体合金晶界沉淀;分形几何在材料科学中的应用,著有《高温合金晶界间隙相》,在国内外发表论文70余篇,作为第一完成人的2个项目分别获1995年度湖北省科技进步一等奖和冶金工业部科技进步二等奖。



刘雅晶 1993年和1996年在东北大学分别获金属物理的学士学位和材料科学与工艺的硕士学位,现在在北京科技大学攻读博士学位,从事高温合金和分形几何等方面的研究工作,发表论文多篇。



李蓬 1993年和1995年在东北大学分别获金属物理专业和计算机软件专业的学士学位,1998年于北京航空航天大学获材料物理专业的硕士学位,从事过非金态、晶界、Ti-Al合金和分形几何等方面的研究工作,发表论文多篇。



赵咏秋 1982年毕业于武汉汽车工业大学,大冶特殊钢股份有限公司技术中心高级工程师,国际体视学会会员。主要从事体视学和材料科学研究,已在国内外刊物上发表论文十余篇,译著一部。

Iterative Two-fork Tree and Fractal Dimension Determination for a Modified Koch Curve Island

Li Yuqing¹, Li Peng², Liu Yajing³, Zhao Yongqiu¹

(1 *Technology Center, Daye Steel Corp Ltd, Huangshi 435001*)

(2 *Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083*)

(3 *Beijing University of Science and Technology, Beijing 100083*)

Abstract The iterative two-fork tree of perimeter and area on a modified Koch curve island is acquired, and from this, the formulae for calculating perimeter and area is obtained. It shows that the theoretical value of fractal dimension could be acquired from perimeter-maximum diameter relation for the fractal structure. It also shows the relation between that the critical nested tier of both the theoretical value of the fractal dimension and the ideal value of the fractal dimension, which meets the precision of auto-image analysis obtained from perimeter-area relation and parameters a and n could be ascertained. It is considered that the perimeter-area method is effective to obtain ideal value of fractal dimension in determination of fractal dimension.

Keywords Modified Koch curve island, Iterative two-fork tree, Critical nested tier, Determination of fractal dimension